Пример решения задачи нелинейного программирования

Тема: Нелинейное программирование. Применение основной теоремы выпуклого анализа Куна – Таккера.

Задание. По плану производства необходимо изготовит количество изделий, указанное в условии каждого задания «общий объём выпуска». Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. Стало известно, что при производстве x_1 изделий первым способом затраты определяются функцией двух переменных x_1, x_2, соответствующей каждому варианту. При изготовлении x_2 изделий вторым способом затраты также определяются функцией двух переменных x_1, x_2, соответствующей каждому варианту.

Определить оптимальное число изделий, изготовленных различными способами, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными (см. варианты заданий). Вычислить получаемую экономию от такого решения задачи.

Затраты для производства первым способом: $x_1^2 + 2x_1$ руб.

Затраты для производства вторым способом: $x_2^2 + 16x_2$ руб.

Общий объём выпуска: 100 шт.

Решение: введём функцию суммарных затрат на производство $f(x)$ и сформулируем математическую постановку задачи:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 16x_2 \to \min$$

при ограничении:

$$x_1 + x_2 = 197$$

Составляем функцию Лагранжа и задачу условной оптимизации сводим к задаче безусловной оптимизации:

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 16x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 197).$$

Находим первые частные производные функции Лагранжа и приравниваем их к нулю. Из полученной системы уравнений находим значения переменных x_1, x_2, возможно, соответствующие оптимальному решению исходной задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2x_1 + 2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 16 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 197 = 0 \end{cases}$$

Подставляем выражение λ через x_1 во второе уравнение:

$$2x_2 + 16 - 2x_1 - 2 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + 14 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 + x_1.$$

Полученное выражение для x_2 подставляем в третье уравнение:

$$x_1 + 7 + x_1 - 197 = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 95, x_2 = 7 + 95 = 102.$$

Проверяем, имеет ли исходная функция $f(x)$ экстремум в точке (95; 102). Для этого вычисляем вторые частные производные $f(x)$ и определитель, составленный из них:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Следовательно, по теореме о достаточном условии существования экстремума функции нескольких переменных функция $f(x)$ в точке имеет (95; 102) минимум, равный $f(95, 102) = 95^2 + 2 \times 95 + 102^2 + 16 \times 102 = 21251$.